2°/ On a : $\forall x \geq \frac{-1}{2}$, $-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x)-x \leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

$\forall x \geq \frac{-1}{2}$ et $x \neq 0$, $-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

B) 1°/ $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est définie, continue sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

comme étant le quotient des fonctions continues.

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{1}{1}=1=f(0)$

  d'où f est continue en 0.

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{X-1}{\ln X}=0=f(-1)$ $(X=x+1)$

  d'où f est continue en -1.

Conclusion : f est continue sur $[-1,+\infty[$.

2°/ $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\ln(1+x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ \ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}-\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$ (d'après **A)** 2°/)

d'où f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{2}$.